l'École Nationale Supérieure des Ingénieurs des Études et Techniques d'Armement
MATHEMATIQUES 2

Options M et P

Dans tout le problème, p est un entier naturel au moins égal à 2, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$ sont les espaces vectoriels de dimension p sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement.

A étant le vecteur $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ de $\mathbb{R}^p$, on lui associe l'application h_A de $\mathbb{C}^p$ dans l'ensemble S des suites complexes, définie par :

quel que soit $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{p-1})$ élément de $\mathbb{C}^p$, $h_A(Z)$ est la suite u de terme général u_n telle que :

a - $u_0 = z_0$, $u_1 = z_1, \ldots, u_{p-1} = z_{p-1}$

b - quel que soit n entier naturel, $u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1}$.

Les parties II et III sont largement indépendantes. La partie III-C peut éventuellement être résolue sans référence au reste du problème.

PREMIERE PARTIE

1 - a - N étant un entier naturel non nul, exprimer le polynôme à N variables $t_1, t_2, \ldots t_N$ et à coefficients complexes, égal au déterminant de la matrice de terme général t_j^k, où j est l'indice de la ligne et k celui de la colonne, k variant de 0 à N-1 et j de 1 à N.

b - En déduire que pour tout entier naturel k tel que $k \leq p$, et pour tout k-uplet de nombres complexes distincts $r_1, r_2, \ldots, r_k$, les k vecteurs de $\mathbb{C}^p$ $(1, r_j^1, r_j^2, \ldots, r_j^{p-1})$, où $j = 1, 2, \ldots, k$, sont linéairement indépendants.

2 - a - Montrer que h_A est une application linéaire injective.

b - En déduire que l'ensemble $h_A(\mathbb{C}^p)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension p.

3 - a - Déterminer un polynôme P réel et de degré p, tel que la suite géométrique u de premier terme 1 et de raison r appartienne à l'espace vectoriel $h_A(\mathbb{C}^p)$ si et seulement si $P(r) = 0$.

b - En considérant les racines distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de P, déduire de ce qui précède un sous-espace vectoriel de $h_A(\mathbb{C}^p)$.

Dans quel cas particulier peut-on ainsi déterminer une base de l'espace vectoriel $h_A(\mathbb{C}^p)$?

4 - Montrer que le problème suivant :

" déterminer $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{p-1})$ tel que, quel que soit Z dans $\mathbb{C}^p$, u étant l'image de Z par h_A, $b_0 u_0 + b_1 u_1 + \ldots + b_{p-1} u_{p-1} = b_0 u_1 + b_1 u_2 + \ldots + b_{p-1} u_p$ et $b_{p-1} = 1$ "

admet une solution B et une seule si, et seulement si, 1 est racine du polynôme P. Donner alors l'expression de B.

5 - Le nombre 1 étant racine du polynôme P :

a - Etudier, pour Z quelconque et $u = h_A(Z)$, la nature de la suite de terme général w_n, tel que $w_n = b_0 u_n + \ldots + b_{p-1} u_{n+p-1}$.

b - Montrer que cette étude permet de déterminer les limites éventuelles des suites u lorsque 1 est racine simple de P et seulement dans ce cas.

c - Préciser, lorsque 1 est racine simple de P, en fonction des coordonnées de Z, la limite éventuelle de la suite u.

d - Justifier que, si 1 est racine multiple de P, la suite u diverge lorsque $w_0 \neq 0$.

6 - Montrer que la suite naturelle $\mathbb{N}$ appartient à $h_A(\mathbb{C}^p)$ si, et seulement si, 1 est racine multiple de P.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, les coordonnées de A sont toutes strictement positives et vérifient : $a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} \leq 1$.
Z, noté maintenant X, a des coordonnées réelles.

u désigne $h_A(X)$ et m_n la borne supérieure des valeurs absolues des coordonnées de $U_n(X) = (u_n \ldots u_{n+p-1})$.

1 - a - Démontrer que les racines de P ont toutes un module au plus égal à 1, l'inégalité étant stricte quand $a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} < 1$.

b - Lorsque $a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} = 1$, démontrer que la seule racine de P de module 1 est 1, et que c'est une racine simple.

2 - Montrer que la suite de terme général m_n converge.

3 - a - Déterminer la limite de la suite de terme général m_{np} dans le cas où :
$a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} < 1$.
On posera $s = a_0 + a_1 + ... + a_{p-1}$.

b - En déduire, en ce cas, la nature et la limite de la suite u.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, les coordonnées de A vérifient : $a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} = 1$.

Z, noté X, comme dans II, a toutes ses coordonnées réelles.

A - Premier cas :

$a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = \frac{1}{p}$.

1 - Déduire de la partie I :

a - Le polynôme P défini dans I - 3,

b - le p-uplet B défini dans I - 4,

c - L'éventuelle limite de h_A (X) en fonction des coordonnées de X.

d - Les propriétés des modules des racines de P et l'ordre de la racine égale à 1 (en cas d'échec au II. on pourra établir les résultats demandés dans ce cas particulier ou, à défaut, les admettre).

2 - Montrer que, quel que soit X, la suite h_A (X) est bornée.

3 - X fixé, on note respectivement α_n et β_n les plus petite et plus grande coordonnées de U_n (X) = $(u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+p-1})$.

Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones et convergent.

4 - Montrer que les suites (α_{np}) et (β_{np}) sont adjacentes. A cet effet, on pourra prouver que pour tout entier m tel que $\alpha_m \neq \beta_m$, l'intervalle $\left[\frac{((p-1)\alpha_m + \beta_m)}{p}, \frac{((p-1)\beta_m + \alpha_m)}{p}\right]$ contient le nombres u_{m+p}

En déduire que h_A (X) converge, et calculer sa limite en fonction des coordonnées de X.

5 - Montrer que P admet p racines simples. Préciser le nombre des racines réelles.
[On pourra poser $Q(t) = (t-1) P(t)$ et étudier Q].
Retrouver par cette méthode la nature de $h_A(X)$.

B - Deuxième cas :

Les nombres a_j sont tous strictement positifs, le plus petit vaut μ.
X étant fixé, α_n et β_n sont encore les plus petite et plus grande coordonnées de $U_n(X)$. Reprendre les questions 1- à 4- du cas précédent.

C - Troisième cas :

On suppose $p = 3$.

Au triplet (a_0, a_1, a_2) on associe dans un repère orthonormé du plan, le point M de coordonnées (a_0, a_2).

1 - Dans l'hypothèse où le polynôme $t^3 - a_0 - a_1 t - a_2 t^2$ admet comme racines 1 et une racine double r, nulle ou non, telle que $r \neq 1$, déterminer l'ensemble des suites $h_A(\mathbb{C}^3)$ après avoir établi que, si r est non nulle, la suite de terme général $n r^n$ appartient à $h_A(\mathbb{C}^3)$.

2 - Déterminer l'ensemble des points M tels que $h_A(Z)$ converge quel que soit Z, et calculer alors la limite de la suite $u = h_A(Z)$ en fonction de Z.

3 - Déterminer l'ensemble des points M tels que l'ensemble des vecteurs Z vérifiant "$h_A(Z)$ converge" soit un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{C}^3$.